Rachunek Błędów
Zadanie Doświadczalne 1
Fizyka UW 2006/2007

Marcin Polkowski, gr. 7
indeks: 251328

12 stycznia 2007

Spis treści

1 Opis doświadczenia

Celem doświadczenia jest wyznaczenie współczynnika sprężystości k plastikowej linijki poprzez obciążanie jej końca monetami o znanych masach.

Do doświatczenie użyte zostały następujące mrzedmioty i narzędzia:

- plastikowa linijka o długości 50 cm
- sztywna, drewniana listwa o długości 50 cm
- ścisk stolarski
- sówmiarka o dokładności $0,1$ mm
- zestaw monet

Linijka wraz z drewnianą listwą zostały przzomocowane do brzegu stołu (linijka znajduje się pomiędzy listwą o stołem) za pomocą ścisku stolarskiego, w taki sposób że listwa i linijka wystawały poza krawędź stołu na tą samą odległość.

Do końca linijki została przyczepiona za pomocą nitki papierowa platforma (o pomijalnej masie), na której można umieszczać monety.

Na poniższym rysunku znajduje się schemat doświadczenia:

Na potrzeby doświadczenia zostały założone następujące fakty:

- masa papierowej platformy jest równa 0.
- drewniana listwa nie ugina się pod swoim ciężarem.
- pomiędzy listwą a linijką nie ma oddziaływań grawitacyjnego i elektrostatycznego.
- linijka jest wykonana z jednorodnego materiału.
- zjawiska związane z ruchem obrotowym ziemi są pomijalne.

2 Przebieg doświadczenia

Pomiary wychyleń linijki zostały wykonane dla trzech wartości długości linijki: $0,34$ m, $0,40$ m, $0,47$ m.
Użyto następujących monet:

1 gr	o masie	$1,64$ g
50 gr	o masie	$3,94$ g
1 zł	o masie	$5,00$ g
2 zł	o masie	$5,21$ g

W następujących konfiguracjach:

1×1 gr					o masie	$1,64$ g
1×1 zł					o masie	$5,00$ g
1×1 zł	$+$	1×50 gr			o masie	$8,94$ g
2×1 zł					o masie	$10,00$ g
2×1 zł	$+$	1×50 gr			o masie	$13,94$ g
2×2 zł	$+$	1×50 gr			o masie	$14,36$ g
3×1 zł					o masie	$15,00$ g
4×1 zł					o masie	$20,00$ g
4×1 zł	$+$	1×2 zł			o masie	$25,21$ g
4×1 zł	$+$	2×2 zł			o masie	$30,42$ g
4×1 zł	$+$	3×2 zł			o masie	$35,63$ g
4×1 zł	$+$	3×2 zł	$+$	1×50 gr	o masie	$39,57$ g

3 Fizyczne i matematyczne podstawy doświadczenia

Siła ciążenia monet zaczepionych na końcu linijki jest równa:

$$F_g = mg \tag{1}$$

Gdzie m jest sumą mas wszystkich monet zamocowanych do linijki, a g jest wartością przyspieszenia zmiemskiego.
Wartość przyspieszenia zmieskiego dla Warszawy wynosi:

$$g = 9,8123 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

Siła będąca rekacją linijki na wychylenie (odgięcie) jest równa:

$$F = -\alpha h \tag{3}$$

Gdzie α jest współczynnikiem sprężystości, a h wychyleniem linijki od poziomu równowagi. Siła F jest co do wartości równa sile F_g. Obie siły mają ten sam kierunek i przeciwne zwroty:

$$F = -F_g \tag{4}$$

więc:

$$mg = \alpha h \tag{5}$$

Zależność masy monet i wychylenia linijki jest zależnością liniową, której współczynnik kierunkowy jest szukanym przez nas współczynnikiem sprężystości linijki. Zależność liniowa ma postać:

$$y = ax + b \tag{6}$$

Na potrzeby obliczeń statystycznych wykonywanych w dalszej części pracy wzór (5) przekształcam do postaci (6):

$$h = \frac{g}{\alpha} m \tag{7}$$

Postać taka jest właściwa ze względu na fakt, iż masa m jest wielkością dokładną, a odchylenie h jest wielkością obarczoną błędem pomiaru.
Dla poprawienia przejżystości obliczeń we wzorze (7) dokonujemy podstawienia:

$$a = \frac{g}{\alpha} \tag{8}$$

otrzymując wzór liniow zależny od h i m z parametrem a:

$$h = am + b \tag{9}$$

4 Wyniki doświadczenia

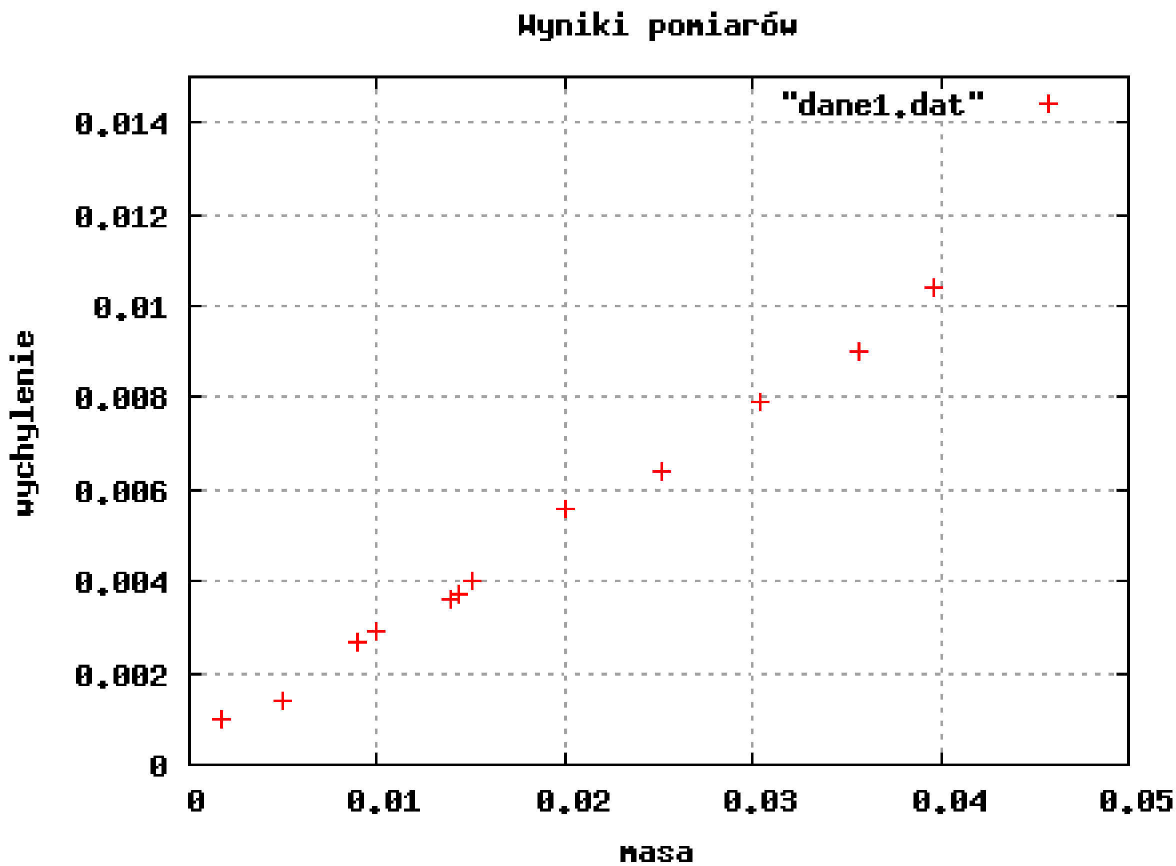
W tej częsci pracy zostaną przedstawione wyniki pomiarów wraz z ich interpretacją statystyczną.

4.1 Pierwsza seria pomiarów

Pierwsza seria pomiarów wychylenia linijki w zależności od obciązenia została wykonana dla linijki o długości $0,34$ m. Wykonanych zostało 12 pomiarów wychylenie dla 12 różnych mas (patrz paragraf 2).

Zmierzono następujące wartości:

masa		wychylenie
m[kg]		h[m]
$0,00164$	$\rightarrow$	$0,0010 \pm 0,0001$
$0,00500$	$\rightarrow$	$0,0014 \pm 0,0001$
$0,00894$	$\rightarrow$	$0,0027 \pm 0,0001$
$0,01000$	$\rightarrow$	$0,0029 \pm 0,0001$
$0,01394$	$\rightarrow$	$0,0036 \pm 0,0001$
$0,01436$	$\rightarrow$	$0,0037 \pm 0,0001$
$0,01500$	$\rightarrow$	$0,0040 \pm 0,0001$
$0,02000$	$\rightarrow$	$0,0056 \pm 0,0001$
$0,02521$	$\rightarrow$	$0,0064 \pm 0,0001$
$0,03042$	$\rightarrow$	$0,0079 \pm 0,0001$
$0,03563$	$\rightarrow$	$0,0090 \pm 0,0001$
$0,03957$	$\rightarrow$	$0,0104 \pm 0,0001$



Aby wyznaczyć optymalną wartość paramerów a i b ze wzoru (9) należy do powyższych danych zastosować metodę najmniejszech kwadratów:

$$a = \frac{N(\Sigma m_i h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{10}$$

$$b = \frac{(\Sigma m_i^2)(\Sigma h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i m_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{11}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$a = 0,247744618727\ldots \tag{12}$$

$$b = 0,000347335818\ldots \tag{13}$$

Z równań (8) i (10) wyznaczamy α:

$$\alpha = \frac{g}{\frac{N(\Sigma m_i h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2}} \tag{14}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\alpha = 39,606511133955\ldots \tag{15}$$

Aby dokonać oceny otzymanego wyniku należy wyznaczyć jego niepewność. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie niepewności pomiarów wychylenia h:

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N-2}\Sigma(h_i - am_i)^2 \tag{16}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie niepewności wartości a i b:

$$\sigma_a^2 = N\frac{\sigma_h^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{17}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_h^2 \Sigma \frac{m_i^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{18}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,010796836543\ldots \tag{19}$$

$$\sigma_b = 0,000203824893\ldots \tag{20}$$

Po zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,011 \tag{21}$$

$$\sigma_b = 0,00020 \tag{22}$$

więc:

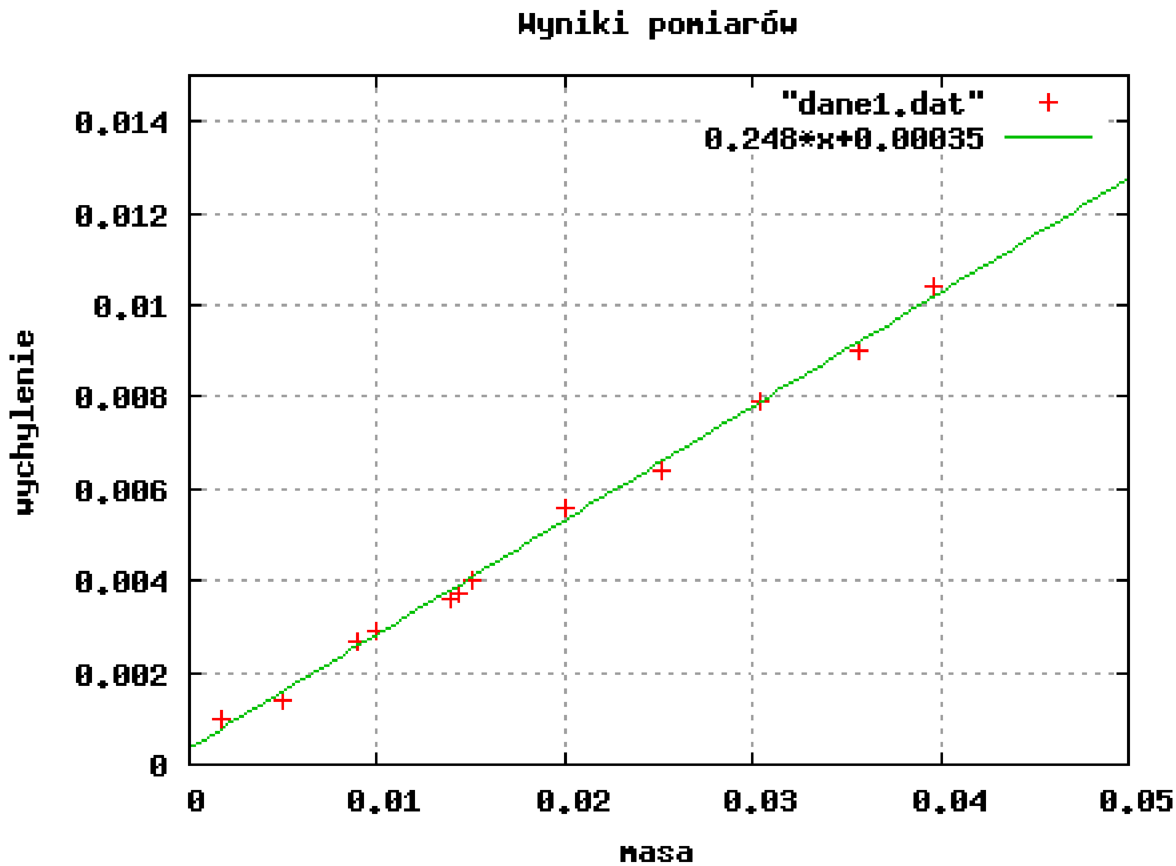
$$a = 0,248 \pm 0,011 \tag{23}$$

$$b = 0,00035 \pm 0,00020 \tag{24}$$

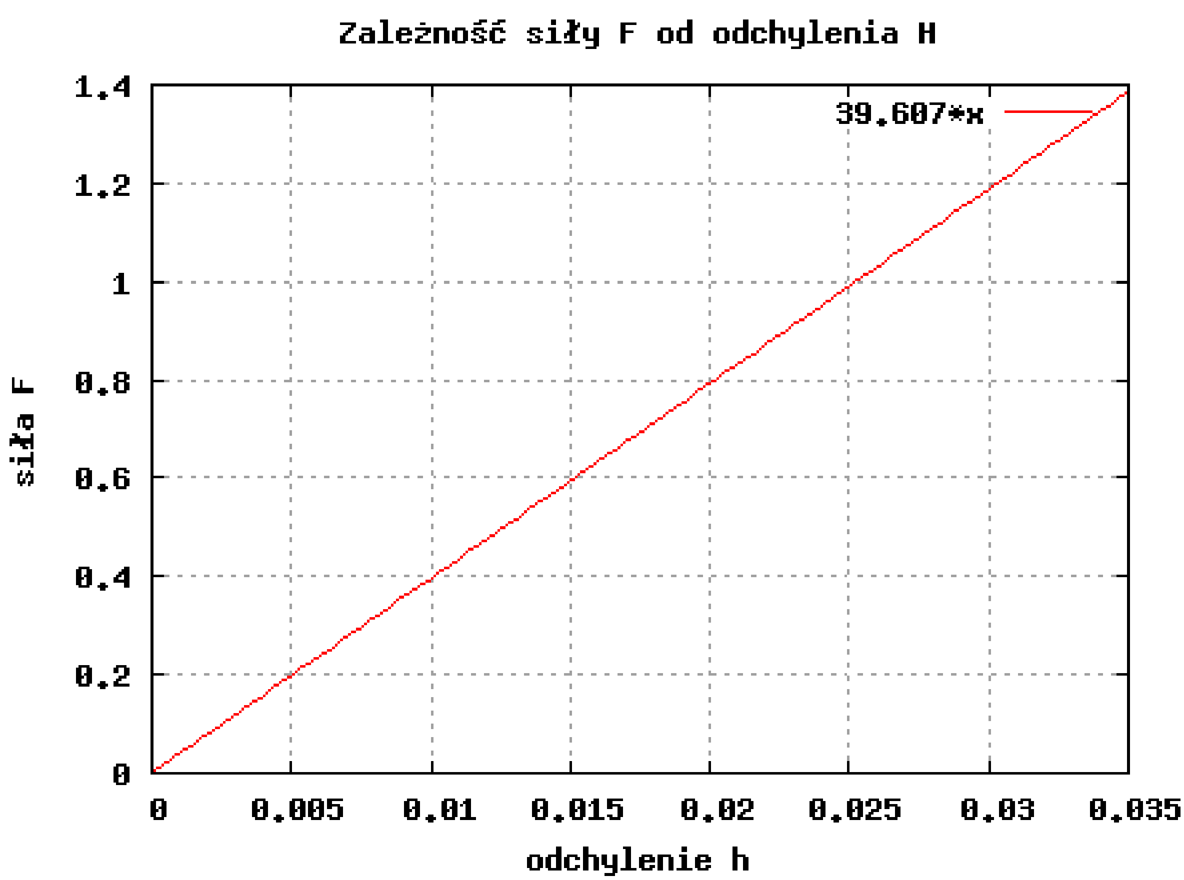
oraz:

$$\alpha = 39,607 \pm 0,001 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{25}$$

Na poniższym wykresie widać pomiary, oraz liniową zależność daną wzorem (9):



Poniższy wykresie przedstawia zależność wartości siły F od odchylenia h daną wzorem $F(h) = \alpha h$

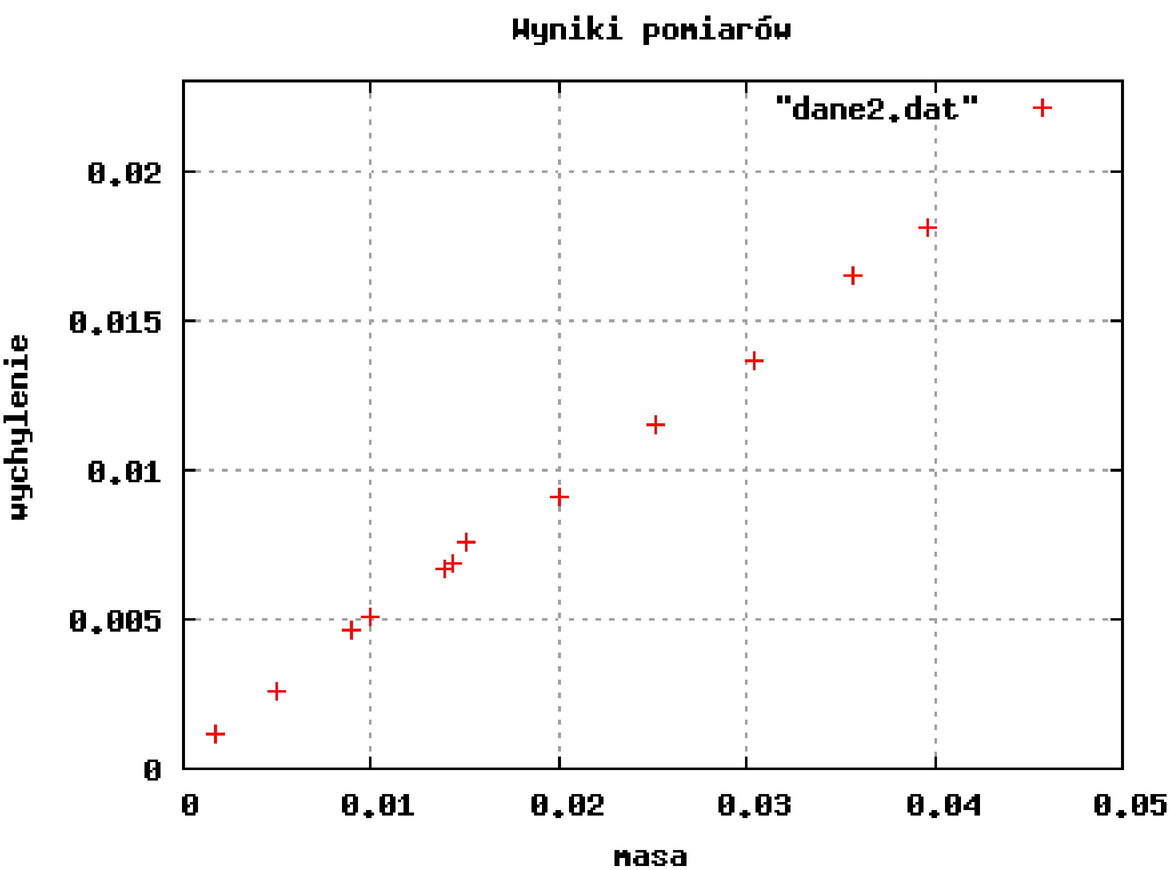


4.2 Druga seria pomiarów

Druga seria pomiarów wychylenia linijki w zależności od obciązenia została wykonana dla linijki o długości $0,40$ m. Wykonanych zostało 12 pomiarów wychylenie dla 12 różnych mas (patrz paragraf 2).

Zmierzono następujące wartości:

masa		wychylenie
m[kg]		h[m]
$0,00164$	$\rightarrow$	$0,0012 \pm 0,0001$
$0,00500$	$\rightarrow$	$0,0026 \pm 0,0001$
$0,00894$	$\rightarrow$	$0,0046 \pm 0,0001$
$0,01000$	$\rightarrow$	$0,0051 \pm 0,0001$
$0,01394$	$\rightarrow$	$0,0067 \pm 0,0001$
$0,01436$	$\rightarrow$	$0,0069 \pm 0,0001$
$0,01500$	$\rightarrow$	$0,0076 \pm 0,0001$
$0,02000$	$\rightarrow$	$0,0091 \pm 0,0001$
$0,02521$	$\rightarrow$	$0,0115 \pm 0,0001$
$0,03042$	$\rightarrow$	$0,0136 \pm 0,0001$
$0,03563$	$\rightarrow$	$0,0165 \pm 0,0001$
$0,03957$	$\rightarrow$	$0,0181 \pm 0,0001$



Aby wyznaczyć optymalną wartość paramerów a i b ze wzoru (9) należy do powyższych danych zastosować metodę najmniejszech kwadratów:

$$a = \frac{N(\Sigma m_i h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{26}$$

$$b = \frac{(\Sigma m_i^2)(\Sigma h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i m_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{27}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$a = 0,440866344795\ldots \tag{28}$$

$$b = 0,000553104615\ldots \tag{29}$$

Z równań (8) i (26) wyznaczamy α:

$$\alpha = \frac{g}{\frac{N(\Sigma m_i h_i)-(\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2)-(\Sigma m_i)^2}} \tag{30}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\alpha = 22,256858832278\ldots \tag{31}$$

Aby dokonać oceny otzymanego wyniku należy wyznaczyć jego niepewność. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie niepewności pomiarów wychylenia h:

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N-2}\Sigma(h_i - am_i)^2 \tag{32}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie niepewności wartości a i b:

$$\sigma_a^2 = N\frac{\sigma_h^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{33}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_h^2 \Sigma \frac{m_i^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{34}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,016210008913\ldots \tag{35}$$

$$\sigma_b = 0,000306015871\ldots \tag{36}$$

Po zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,016 \tag{37}$$

$$\sigma_b = 0,00031 \tag{38}$$

więc:

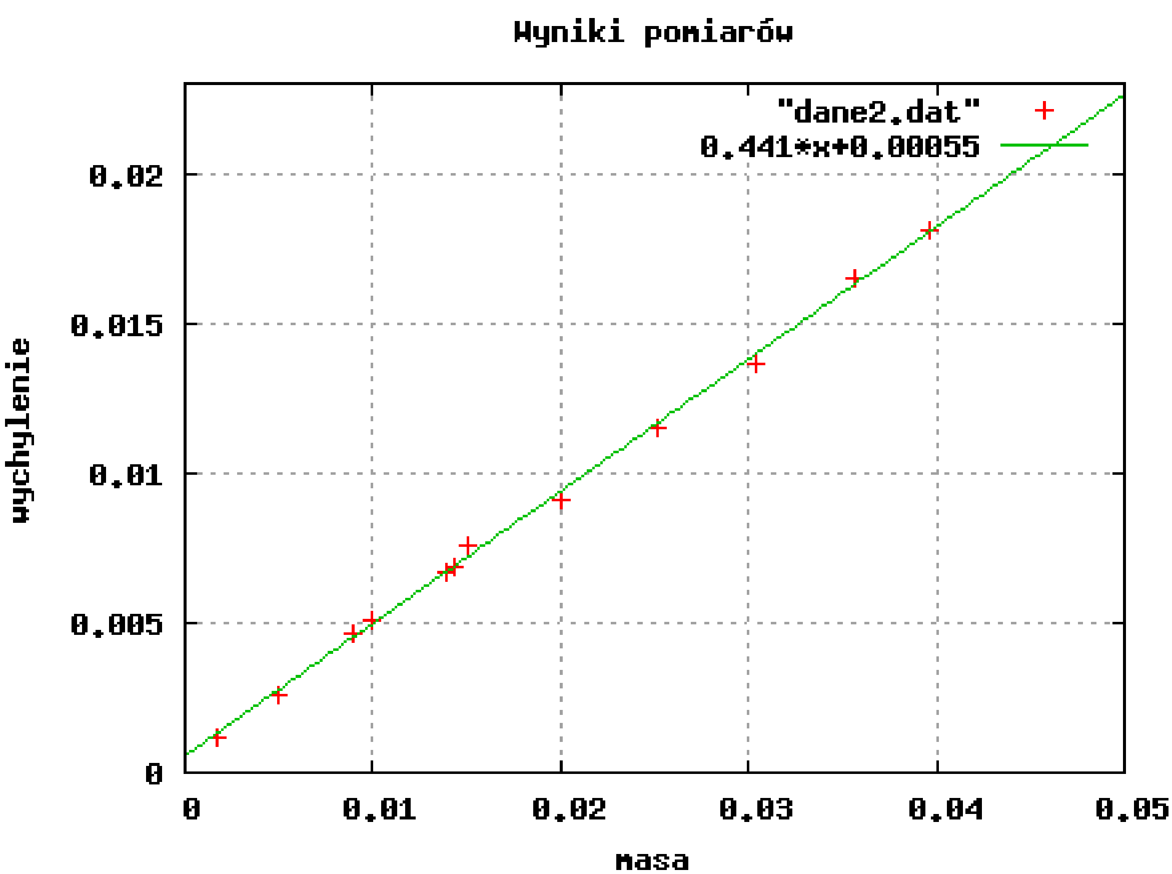
$$a = 0,441 \pm 0,016 \tag{39}$$

$$b = 0,00055 \pm 0,00031 \tag{40}$$

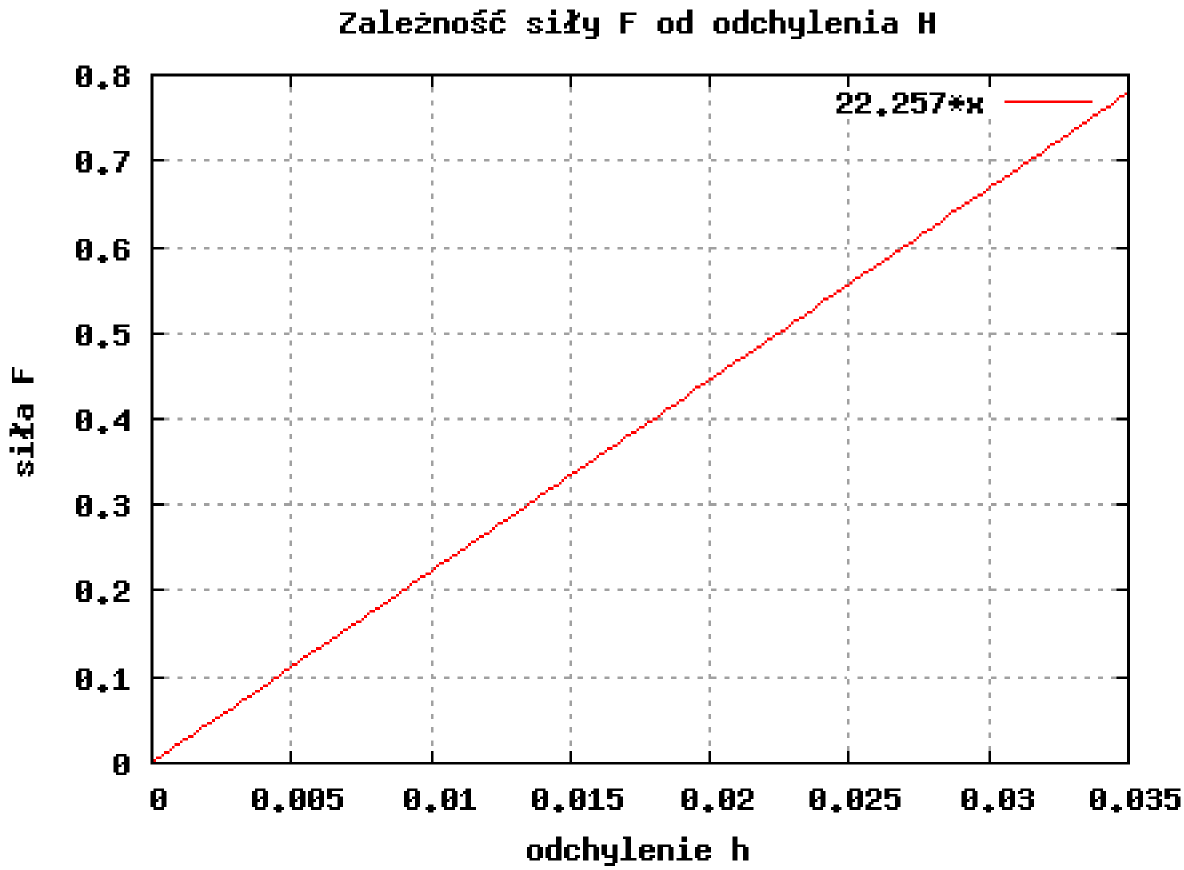
oraz:

$$\alpha = 22,257 \pm 0,002\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{41}$$

Na poniższym wykresie widać pomiary, oraz liniową zależność daną wzorem (9):



Poniższy wykresie przedstawia zależność wartości siły F od odchylenia h daną wzorem $F(h) = \alpha h$

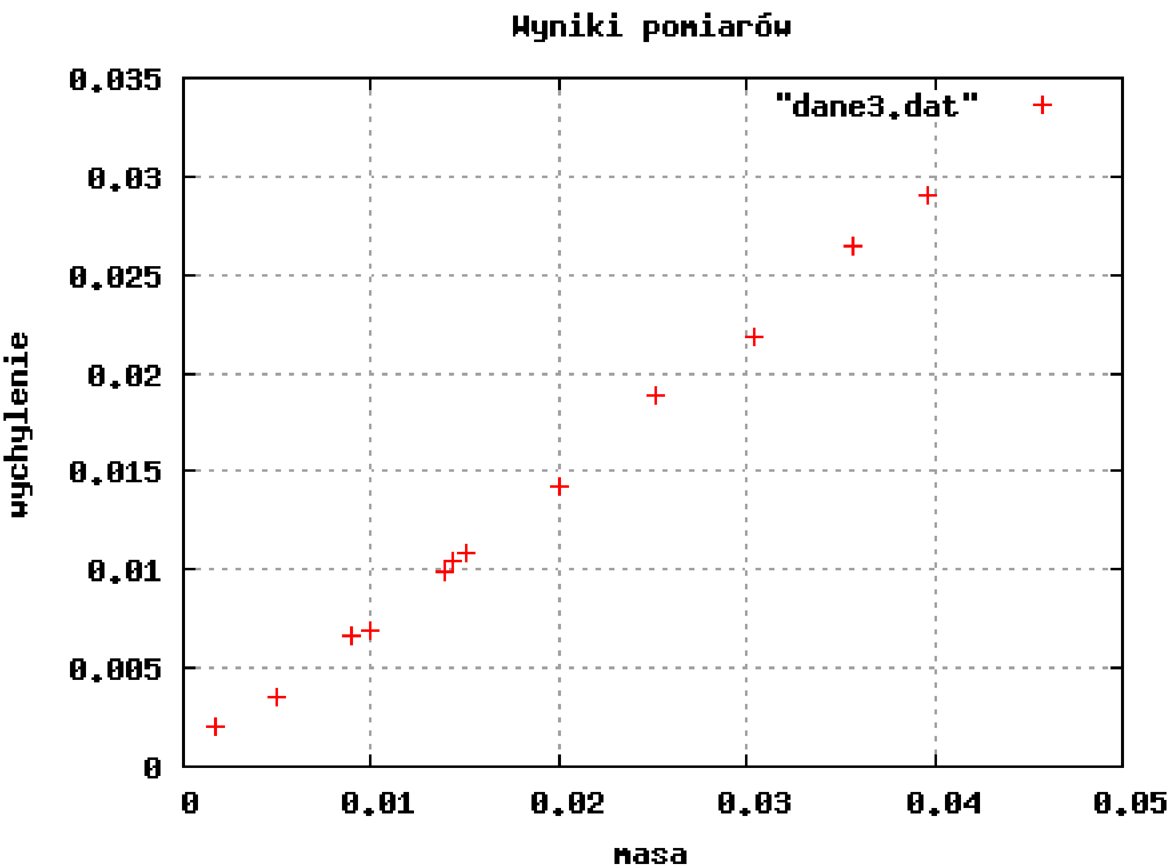


4.3 Trzecia seria pomiarów

Druga seria pomiarów wychylenia linijki w zależności od obciązenia została wykonana dla linijki o długości $0,47$ m. Wykonanych zostało 12 pomiarów wychylenie dla 12 różnych mas (patrz paragraf 2).

Zmierzono następujące wartości:

masa m[kg]		wychylenie h[m]
$0,00164$	$\rightarrow$	$0,0020 \pm 0,0001$
$0,00500$	$\rightarrow$	$0,0035 \pm 0,0001$
$0,00894$	$\rightarrow$	$0,0066 \pm 0,0001$
$0,01000$	$\rightarrow$	$0,0069 \pm 0,0001$
$0,01394$	$\rightarrow$	$0,0099 \pm 0,0001$
$0,01436$	$\rightarrow$	$0,0104 \pm 0,0001$
$0,01500$	$\rightarrow$	$0,0108 \pm 0,0001$
$0,02000$	$\rightarrow$	$0,0143 \pm 0,0001$
$0,02521$	$\rightarrow$	$0,0189 \pm 0,0001$
$0,03042$	$\rightarrow$	$0,0219 \pm 0,0001$
$0,03563$	$\rightarrow$	$0,0265 \pm 0,0001$
$0,03957$	$\rightarrow$	$0,0290 \pm 0,0001$



Aby wyznaczyć optymalną wartość paramerów a i b ze wzoru (9) należy do powyższych danych zastosować metodę najmniejszech kwadratów:

$$a = \frac{N(\Sigma m_i h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{42}$$

$$b = \frac{(\Sigma m_i^2)(\Sigma h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i m_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{43}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$a = 0,732112780820\ldots \tag{44}$$

$$b = -0,000012708256\ldots \tag{45}$$

Z równań (8) i (42) wyznaczamy α:

$$\alpha = \frac{g}{\frac{N(\Sigma m_i h_i) - (\Sigma m_i)(\Sigma h_i)}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2}} \tag{46}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\alpha = 13,402716435323\ldots \tag{47}$$

Aby dokonać oceny otzymanego wyniku należy wyznaczyć jego niepewność. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie niepewności pomiarów wychylenia h:

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N-2}\Sigma(h_i - am_i)^2 \tag{48}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie niepewności wartości a i b:

$$\sigma_a^2 = N\frac{\sigma_h^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{49}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_h^2 \Sigma \frac{m_i^2}{N(\Sigma m_i^2) - (\Sigma m_i)^2} \tag{50}$$

Po dokonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,010006192159\ldots \tag{51}$$

$$\sigma_b = 0,000188898947\ldots \tag{52}$$

Po zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących otrzymujemy:

$$\sigma_a = 0,010 \tag{53}$$

$$\sigma_b = 0,00019 \tag{54}$$

więc:

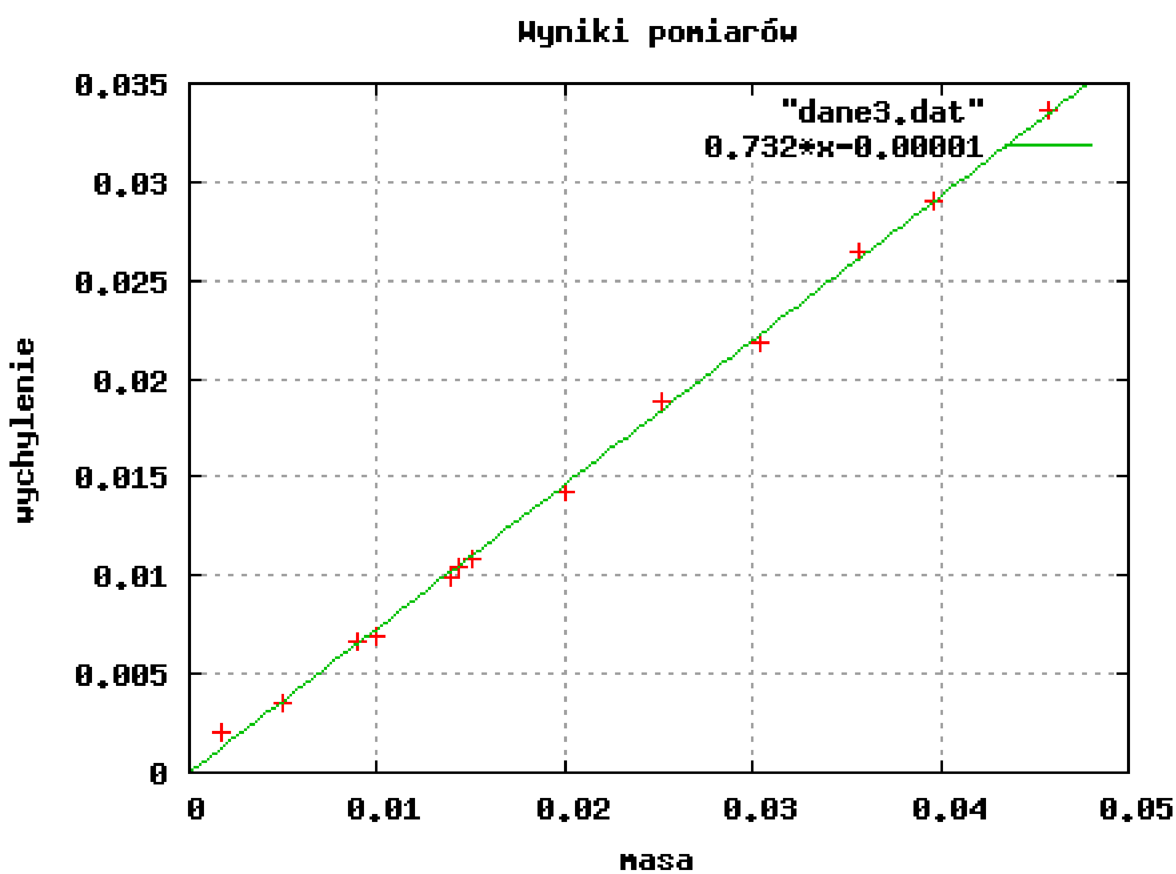
$$a = 0,732 \pm 0,010 \tag{55}$$

$$b = -0,00001 \pm 0,00019 \tag{56}$$

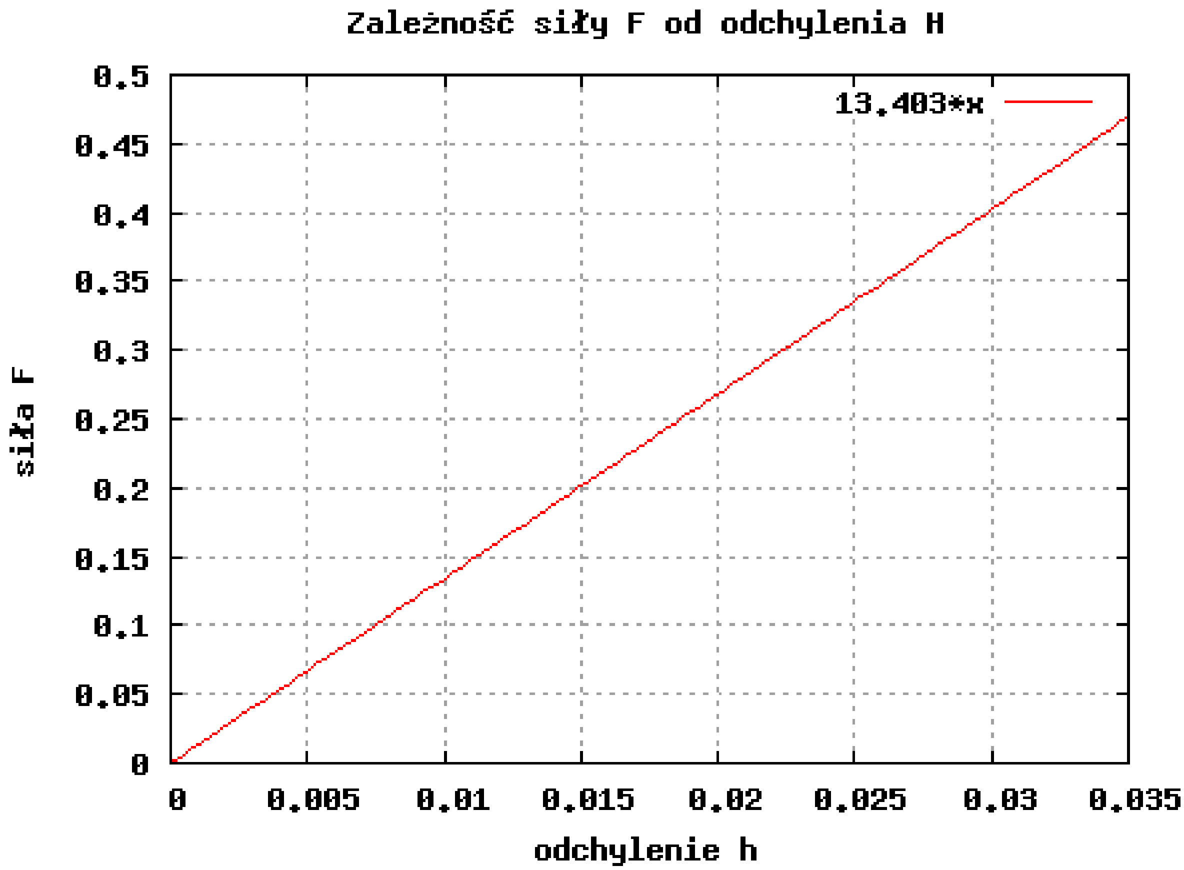
oraz:

$$\alpha = 13,403 \pm 0,001\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{57}$$

Na poniższym wykresie widać pomiary, oraz liniową zależność daną wzorem (9):



Poniższy wykresie przedstawia zależność wartości siły F od odchylenia h daną wzorem $F(h) = \alpha h$



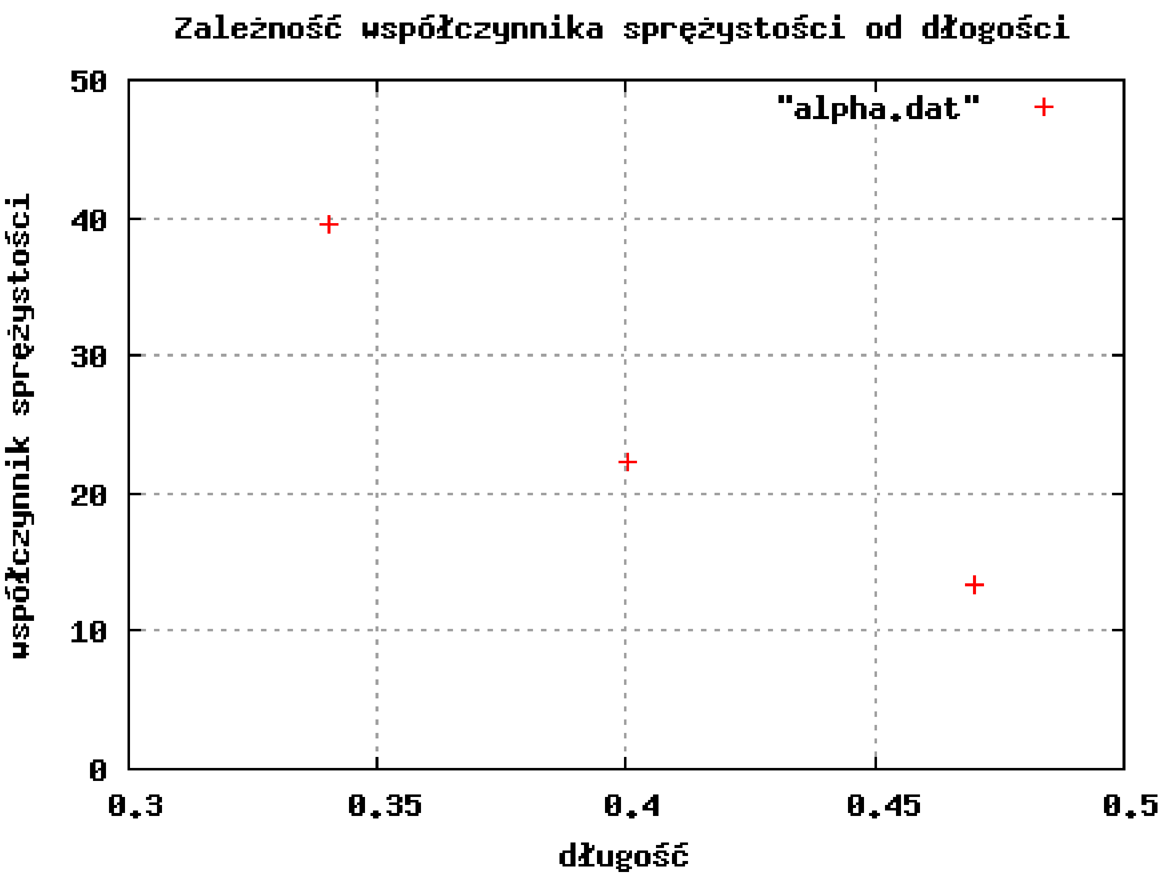
4.4 Podsumowanie trzech serii pomiarów

Omówione zostały trzy serie pomiarów współczynnika sprężystości plastikowej linijki dla różnych długości L.

Wyniki tych pomiarów można zestawić następująco:

długość		współczynnik sprężystości
$L[\mathrm{m}]$		$\alpha[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}]$
$0,34$	$\rightarrow$	$39,607 \pm 0.001$
$0,40$	$\rightarrow$	$22,257 \pm 0.002$
$0,47$	$\rightarrow$	$13,403 \pm 0.001$

Powyższe dane można przedstawić na wykresie:



Na powyższym wykresie widać, że zależność współczynnika sprężystości od długości linijki nie jest zależnością liniową typ $y = ax + b$. Jest to zależność potęgowa typu $y = ax^b$, a właściwie jej szczególny przypadek: $y = \frac{a}{x^b}$.

Do wyznaczenia współczynników a i b użyty został program komputerowy, który jako wynik podał:

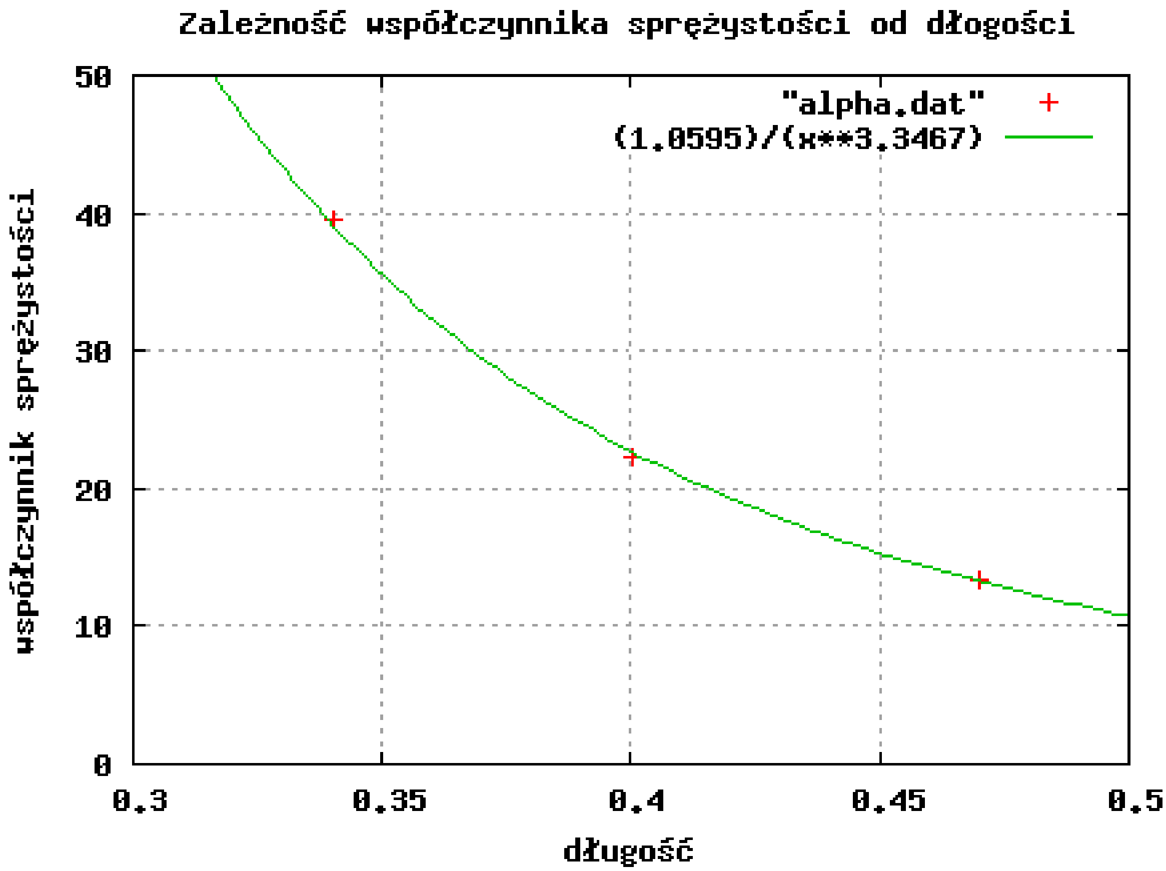
$$a = 1,0595 \tag{58}$$

$$b = 3,3467 \tag{59}$$

Zależność współczynnika sprężystości od długości linijki można więc wyrazić następującym wzorem:

$$y = \frac{1,0595}{x^{3,3467}} \tag{60}$$

Po naniesieniu krzywej na wykres zależności współczynnika sprężystości o długości otrzymujemy:



5 Wnioski

Z przeprowadzonych pomiarów można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Współczynnik sprężystości α nie zależy od siły (w rozsądnych granicach) z jaką działamy na linijkę i wychylenia.
2. Współczynnik sprężystości α zależy od długości linijki.
3. Zależność współczynnika sprężystości α od długości linijki można wyrazić wzorem $y = \frac{a}{x^b}$, gdzie a i b są parametrami charakterystycznymi dla danego materiału z którego wykonana jest linijka.